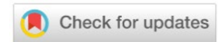
МАШИНОСТРОЕНИЕ И МАШИНОВЕДЕНИЕ
MACHINE BUILDING AND MACHINE SCIENCE

УДК 621.817 Научная статья
https://doi.org/10.23947/2687-1653-2023-23-3-269-282

Оптимизация геометрических характеристик циклоидальных профилей героторных гидромашин

С.О. Киреев ✉, **А.Р. Лебедев** , **М.В. Корчагина**
Донской государственный технический университет, г. Ростов-на-Дону, Российская Федерация
✉ kireevso@yandex.ru

Аннотация
Введение. Производительность и надежность работы героторных гидромашин зависит от геометрических параметров профиля циклоидального зацепления. Существующие методики расчета и оптимизации параметров профиля громоздкие, многокритериальные, сложные для практического применения. Поэтому актуальной представляется проблема создания методики расчета параметров профиля рабочего органа героторной машины, пригодной для инженерных расчетов на этапе эскизного проектирования. В связи с этим целью данной работы являлась модернизация методики проектирования геометрии профилей торцевого сечения гипоциклоидальных зубчатых зацеплений, используемых в героторных гидравлических машинах, и анализ возможностей их оптимизации при предварительном проектировании. В ходе исследования была использована система компьютерной математики Mathcad, проведены численные эксперименты для изучения влияния геометрических параметров профилей на производительность и работоспособность героторной гидравлической машины. На основе полученных и проанализированных данных выработаны рекомендации по проектированию оптимальных профилей торцевого сечения героторных гидравлических машин.
Материалы и методы. Материалы включают в себя известные методики расчета параметров профиля, основанные на применении классических формул эквидистант гипоциклоид, используемых для очерчивания профилей зубьев рабочих органов героторных машин. Основной метод исследования — моделирование профиля героторной машины с помощью системы компьютерной математики Mathcad. Получены расчетные данные для выбранных диапазонов варьируемых параметров, обработанные методом регрессионного однофакторного анализа.
Результаты исследования. Разработан алгоритм анализа гладкости профилей зубьев. Определены два целевых параметра: площадь сечения торцевого профиля, влияющая на производительность, и наименьший приведенный радиус контакта, определяющий работоспособность рабочего органа. Предложена методика по расчету целевых параметров на ранней стадии проектирования. Получен ряд оптимальных значений параметров профиля по критериям производительности и работоспособности героторной машины. Построены зависимости, позволяющие установить оптимальные значения параметров профиля на стадии проектирования.
Обсуждение и заключение. Разработанная авторами методика дает возможность на этапе проектирования рабочего органа получить оценку производительности и работоспособности героторной гидромашины. Результаты исследований могут быть использованы в машиностроении при проектировании героторных гидромашин для улучшения их технико-эксплуатационных характеристик.

Ключевые слова: гидравлическая машина, героторное зацепление, гипоциклоида, ротор, статор, контакт, площадь живого сечения

Благодарности: авторы выражают благодарность всем участникам договора за помощь в проведении стендовых испытаний.

Финансирование. Работа выполнена в рамках госбюджетной НИОКР АААА-А20-120012190068-8 «Исследование, моделирование и разработка инновационных конструкций машин и оборудования нефтегазовых промыслов».

Для цитирования. Киреев С.О., Лебедев А.Р., Корчагина М.В. Оптимизация геометрических характеристик циклоидальных профилей героторных гидромашин. *Advanced Engineering Research.* 2023;23(3):269–282. https://doi.org/10.23947/2687-1653-2023-23-3-269-282

Original article

Optimization of Geometric Characteristics of Cycloidal Profiles of Gerotor Hydraulic Machines

Sergey O. Kireyev ✉, Alexey R. Lebedev, Marina V. Korchagina
Don State Technical University, Rostov-on-Don, Russian Federation
✉ kireevso@yandex.ru

Abstract
Introduction. The performance and reliability of gerotor hydraulic machines depend on the geometry of the cycloidal gearing profile. The existing methods of calculating and optimizing the profile parameters are cumbersome, multi-criteria and difficult for practical application. Therefore, the problem of creating the methodology for calculating the parameters of the gerotor machine profile suitable for engineering calculations at the stage of conceptual design is a challenge. In this regard, the objective of this work was to modernize the methodology for designing the geometry of the profiles of the end section of hypocycloidal gears used in gerotor hydraulic machines, and to analyze the possibilities of their optimization during preliminary design. In the course of the study, the Mathcad computer mathematics system was used; numerical experiments were carried out to study the influence of geometric profile parameters on the performance and operability of the gerotor hydraulic machine, based on the data obtained and analyzed; recommendations for the design of optimal profiles of the end section of gerotor hydraulic machines were developed.
Materials and Methods. Materials included known methods of profile parameters calculation, based on application of classical formulas of hypocycloidal equidistant used for outlining profiles of teeth of working elements of gerotor machines. The basic research method was modeling the gerotor machine profile using Mathcad computer mathematics system. Calculated data were obtained for the selected ranges of varying parameters, processed through the univariate regression analysis.
Results. An algorithm for analyzing the tooth profile smoothness was developed. Two target parameters were defined: the cross-sectional area of the end profile, which affects the productivity; the smallest reduced radius of contact that determines operability of the working body. A technique for calculating the target parameters at the early stage of design was proposed. A number of optimal values of profile parameters according to the criteria of productivity and operability of gerotor machine was obtained. The dependences providing the optimum values of profile parameters at the stage of designing were constructed.
Discussion and Conclusion. The developed methodology makes it possible to obtain an assessment of the performance and operability of the gerotor hydraulic machine at the design stage of the working body. The research results can be used in mechanical engineering when designing gerotor hydraulic machines in order to improve their technical and operational characteristics.

Keywords: hydraulic machine, gerotor gearing, hypocycloid, rotor, stator, contact, open area

Acknowledgements: the authors would like to thank all the parties to the agreement for their assistance in conducting bench tests.

Funding information. The research was carried out within the framework of the state-funded R&D AAAAA20-120012190068-8 "Study, modeling and development of innovative designs of machinery and equipment of oil and gas fields".

For citation. Kireyev SO, Lebedev AR, Korchagina MV. Optimization of Geometric Characteristics of Cycloidal Profiles of Gerotor Hydraulic Machines. *Advanced Engineering Research (Rostov-on-Don).* 2023;23(3):269–282.https://doi.org/10.23947/2687-1653-2023-23-3-269-282

Введение. Героторные гидравлические машины все чаще стали применяться в строительстве и при эксплуатации нефтяных и газовых скважин, причина — их конструктивно-эксплуатационные преимущества, основными из которых являются низкая неравномерность подачи для насосов или крутящего момента для двигателей, компактные габаритные размеры.

В научной литературе большое место занимают исследования, посвященные работе героторных гидромашин. Сильное влияние геометрических характеристик профиля ротора на производительность и надежность винтовых героторных гидромашин отмечают Д. и Ф. Балденко [1]. Основным узлом такой машины является многозаходный винтовой героторный механизм — цилиндрическая планетарная зубчатая передача внутреннего зацепления, состоящая из статора и ротора, с разницей в числах зубьев, равной единице. Профиль статора в торцовом сечении контактирует с профилем ротора, образуя замкнутые площадки. Авторы проанализировали также технологии изготовления зубчатых передач.

Р. Айер, В. Джатти исследовали эффективность применения математических моделей при конструировании винтовых насосов [2]. Они представили также результаты моделирования различных типоразмеров двухвинтовых насосов при перекачивании воды, смеси воды и воздуха. Суан-Фыонг Данг и Хонг-Сок Парк предложили процесс оптимизации CAD-модели с использованием результатов моделирования CAE и вычислений в Mathcad [3]. Другие авторы (А. Лебедев, С. Киреев, М. Корчагина, С. Власкин, А. Ефимов) в своих публикациях отметили эффективность проектирования разнообразных объектов и процессов на основе параметризации и последующей оптимизации конструкции по одному или нескольким целевым параметрам [4–6].

В совместной работе Ф.Д. Балденко и Яо Ян подчеркнули, что площадь живого сечения не зависит от относительного положения профилей ротора и статора и определяет производительность насоса, проанализировали влияние безразмерных геометрических параметров профиля на площадь живого сечения [7].

Лэй Чжэн, Сяодун Ву, Гоцин Хань, Хуачан Ли, Йи Цзо и Дэйк Чжоу разработали конечно-элементную модель рабочего органа винтового насоса с поверхностным приводом для нефтегазовой промышленности [8]. По результатам моделирования и экспериментальных проверок ими был сделан вывод, что зазоры в сопряжении и толщина статора являются двумя основными факторами, влияющими на оптимизируемый целевой параметр — объемную эффективность насоса.

Новые данные получены Х. Гамбоа, А. Оливет, С. Эспин при моделировании рабочего органа однозаходного винтового насоса [9]. Эти авторы определили существенную зависимость между площадью зазора проскальзывания и перепадом давления, связанным с механическими свойствами материала статора.

Яо Ян, Ф. Балденко исследовали влияние безразмерных коэффициентов торцового профиля героторной гидромашины на характеристики циклоидного зацепления, что позволяет проводить оптимизацию на основе геометрических и кинематических критериев [10]. И.А. Лягов, Ф.Д. Балденко, А.В. Лягов, В.У. Ямалиев, А.А. Лягова предложили методику выбора оптимальной конфигурации силовых секций при проектировании секционных забойных двигателей, отметив актуальность проблемы уменьшения габаритных параметров длины винтового насоса [11].

Ю.А. Коротаев, А.Н. Алпатов, А.В. Соболев и др. пришли к выводу, что наиболее эффективным является профилирование зацепления от исходного контура рейки, очерченного эквидистантой укороченной циклоиды [12]. В отношении профилей, полученных от эквидистанты обыкновенной гипоциклоиды, авторы указали на их основной недостаток: они строятся как специальные и не предусматривают натяг в зацеплении. Ю.А. Коротаев и Д.А. Голдобин обратили внимание на проблему, связанную с необходимостью повышения производительности винтовых насосов, и возникающие при этом недопустимые условия жесткости при производстве статоров и роторов [13].

А.Ф. Миникаев, В.А. Пронин, Д.В. Жигновская, Ю.Л. Кузнецов, Ф.Д. Балденко, А.Е. Ковалёнок разработали методику исследования напряженно-деформированного состояния статора при контактном взаимодействии с ротором винтового рабочего органа гидромашины с применением CAE-моделирования и утверждают, что классическая теория Герца о контактном взаимодействии не может быть применена для определения контактных напряжений в роторе и статоре из-за действия ряда особенностей: изменения кривизны соприкасающихся поверхностей ротора и статора, различной толщины эластичной обкладки по длине окружности корпуса, наличия предварительного натяга в паре, сложного планетарного движения ротора, сопровождающегося сочетанием трения качения и скольжения, смещения вектора радиальной силы относительно нормали в точке контакта.

Подводя итог обзору научных публикаций на тему проектирования героторной гидромашины, необходимо отметить, что большинство исследователей в данной области стремятся повысить эффективность работы этой машины, увеличивая площадь живого сечения и сокращая габаритные размеры рабочего органа. Достижение оптимальных результатов происходит за счет применения и варьирования коэффициентов внецентроидности,

формы зуба, относительной скорости скольжения, смещения рейки и т. д. Методики расчета громоздкие, их сложно применять на практике. Торцевые профили строятся, как правило, на основе укороченных гипоциклоид, что приводит к возникновению проблемы с обеспечением кинематической точности движения, контактного взаимодействия ротора и статора. Некоторые авторы (Ю.А. Коротаев, А.Н. Алпатов, А.В. Соболев и др.) указали на невозможность создания натяга в случае применения обыкновенной гипоциклоиды, но натяг может быть создан за счет изменения эквидистантного расстояния профилей ротора и статора.

Материалы и методы. Для получения профилей ротора и статора в торцевом сечении рабочего органа героторной гидравлической машины зададимся следующим набором исходных параметров (рис. 1):

1) R_k — контурный радиус профиля, определяющий диаметр окружности C_1, описывающей профиль статора (мм). Фактически этот параметр задает радиальный габарит героторной машины, что особенно важно в нефтегазовой промышленности, когда проектируемый объект необходимо разместить, например, в стволе эксплуатационной колонны скважины;

2) z_1 — число зубьев ротора;

3) R_r — радиус ролика, определяющий расстояние эквидистантной линии профилей ротора и статора относительно соответствующих гипоциклоид (мм);

4) Δ — натяг в сопряжении ротора и статора (мм).

Напомним принцип образования профилей гипоциклоидального зацепления, который заключается в том, что внутри окружности C_2 (основная окружность гипоциклоиды статора) перекатывается без скольжения окружность C_3 (основная окружность гипоциклоиды ротора). Центр окружности C_3 всегда находится на расстоянии *e* (эксцентриситет) относительно центра окружности C_2. C_2.

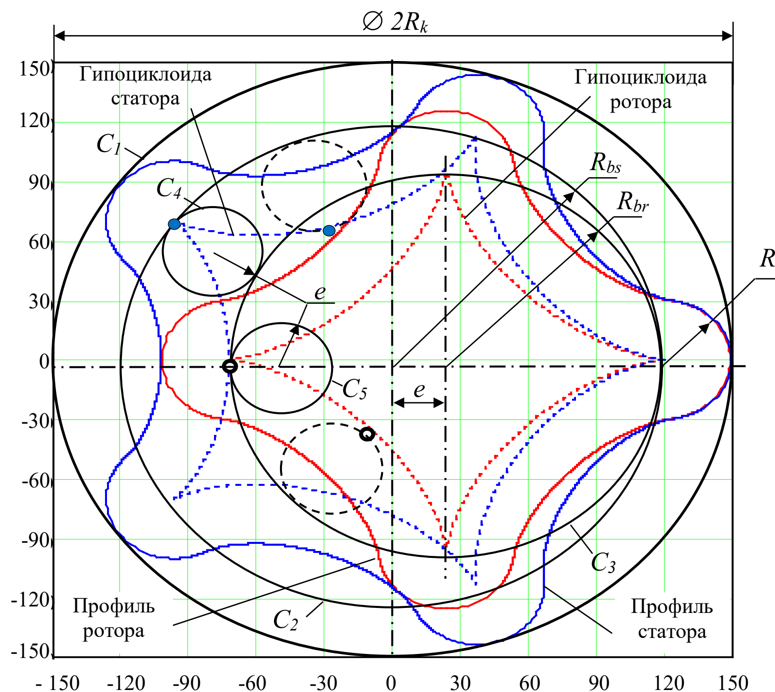


Рис. 1. Схема образования гипоциклоидального профиля торцевого сечения рабочего органа героторной машины, $z_1 = 4$, $R_k = 150$ мм, $R_r = 30$ мм

Внутри окружности C_3 перекатывается без скольжения окружность C_5 (производящая окружность гипоциклоиды ротора), одна точка которой образует гипоциклоиду ротора. Внутри окружности C_2 перекатывается без скольжения окружность C_4 (производящая окружность гипоциклоиды статора), одна точка которой образует гипоциклоиду статора. Заметим, что радиусы окружностей C_5 и C_4 равны эксцентриситету *e*. Профили ротора и статора образуются как эквидистантные линии, отложенные на расстояние R_r от соответствующих гипоциклоид.

В такой постановке профили ротора и статора обеспечивают идеальный контакт при эксцентричном вращении ротора. При необходимости обеспечить натяг/зазор в соединении следует изменить эквидистантное расстояние R_r для профиля ротора на величину Δ.

Перейдем к математическому описанию методики образования профилей торцевого сечения ротора и статора. Число зубьев статора равно

$$z_2 = z_1 + 1. \tag{1}$$

Радиус основной окружности гипоциклоиды статора R_{bs} определим из условия (рис. 1):

$$R_{bs} = R_k - R_r. \tag{2}$$

Определим эксцентриситет *e* передачи по условию равенства длины окружности C_2 целому числу z_2 длин производящей окружности C_4 радиусом *e:*

$$2pR_{bs} = 2pez_2,$$

тогда

$$e = R_{bs} / z_2. \tag{3}$$

Заметим, что при $z_1 = 1$ (механизм Муано) из условия размещения ротора в полости статора необходимо определять эксцентриситет и радиус ролика R_r по другим формулам:

$$e = R_k / 3 u R_r = 2e, \text{ если } z_1 = 1. \tag{4}$$

Радиус основной окружности гипоциклоиды ротора R_{br} равен (рис. 1)

$$R_{br} = R_{bs} - e. \tag{5}$$

Введем функцию для определения радиуса основной окружности ротора или статора, выполняющую условия (2) и (5):

$$R(z) = R_k - R_r - e \cdot (z_2 - z). \tag{6}$$

Параметрические формулы гипоциклоид ротора и статора в декартовой системе координат XOY:

$$\begin{aligned} x(\varphi, z) &= R(z) \cdot \left[\left(1 - 1/z\right) \cos\left(\varphi / z\right) + (a/z) \cos\left(\left(1 - 1/z\right)\varphi\right) \right] \\ y(\varphi, z) &= R(z) \cdot \left[\left(1 - 1/z\right) \sin\left(\varphi / z\right) - (a/z) \sin\left(\left(1 - 1/z\right)\varphi\right) \right] \end{aligned}, \tag{7}$$

где *z* — число ветвей гипоциклоиды ротора z_1 или статора z_2; *a* — коэффициент укорочения гипоциклоиды. В случае обыкновенной гипоциклоиды в теории $a = 1$. Однако в практических расчетах с применением систем компьютерной математики (Mathcad, MATHLAB) при $a = 1$ возникают сложности с вычислением эквидистантных профилей ротора и статора. Поэтому в модели мы допустили $a = 0{,}99$, что для достижения наших целей вполне оправданно; φ — угол поворота радиус-вектора, проведенного из начала координат до каждой точки гипоциклоиды. Если гипоциклоида должна быть построена по N_p точкам, то

$$\varphi(i, z) = 2 \cdot \pi \cdot i \cdot z / N_p, \; i = 0 \ldots N_p. \tag{8}$$

Профили ротора и статора определяются по известным формулам эквидистантной траектории относительно гипоциклоид ротора или статора на расстояние R_r с учетом натяга в сопряжении Δ

$$\begin{aligned} X_p(\varphi, z, \Delta) &= x(\varphi, z) + (R_r + \Delta) \cdot \frac{\partial y(\varphi, z)}{\partial \varphi} \Big/ \sqrt{\left(\frac{\partial y(\varphi, z)}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial x(\varphi, z)}{\partial \varphi}\right)^2} \\ Y_p(\varphi, z, \Delta) &= y(\varphi, z) - (R_r + \Delta) \cdot \frac{\partial x(\varphi, z)}{\partial \varphi} \Big/ \sqrt{\left(\frac{\partial y(\varphi, z)}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial x(\varphi, z)}{\partial \varphi}\right)^2} \end{aligned}. \tag{9}$$

При работе передачи центр ротора движется по окружности радиусом *e* и поворачивается на угол α=0…2π. Все точки ротора при этом совершают дополнительный поворот на угол ψ, определяемый функцией

$$\psi(\alpha) = \alpha \cdot (1 - z_2 / z_1). \tag{10}$$

Модель вращения ротора описывается параметрическими функциями преобразования координат при перемещении и вращении объекта:

$$\begin{aligned} X_v(\alpha, \varphi, \Delta) &= e \cdot \cos(\alpha) + X_p(\varphi, z_1, \Delta)\cos(\psi(\alpha)) - Y_p(\varphi, z_1, \Delta)\sin(\psi(\alpha)) \\ Y_v(\alpha, \varphi, \Delta) &= e \cdot \sin(\alpha) \cdot if(z_1 = 1, 0, 1) + X_p(\varphi, z_1, \Delta)\sin(\psi(\alpha)) + Y_p(\varphi, z_1, \Delta)\cos(\psi(\alpha)) \end{aligned}. \tag{11}$$

В выражении (11) применена условная функция, обнуляющая перемещение по оси Y в случае прямолинейного перемещения ротора в полости статора при $z_1 = 1$.

Опыт применения данной методики показал, что эквидистантные профили ротора и статора при увеличении эквидистантного расстояния или радиуса ролика R_r могут потерять гладкость. Это происходит в точках перехода от эквидистанты окружности в эквидистанту гипоциклоиды. На рис. 2 представлена проблема потери гладкости линии профиля статора в окрестности ±1 мм от точки перехода эквидистантных линий.

В математике известна формула критерия гладкости функции, заданной в параметрическом виде. Для профиля статора такая функция будет иметь вид:

$$F_s(p,z) = \frac{\partial Y_p(p,z,0)}{\partial p} / \frac{\partial X_p(p,z,0)}{\partial p}, \quad (12)$$

где $z = z_2$; p — угол радиус-вектора точки профиля статора.

Необходимо отметить, что функция F_s во всем диапазоне $\varphi(i, z_2)$ ведет себя нестабильно и найти какие-либо особенности ее поведения в интересующей нас точке перехода эквидистантных линий достаточно сложно. Поэтому поведение функции F_s изучалось только в окрестности точки перехода при изменении углового параметра

$$p = \pi / z_2 - m \ldots \pi / z_2 + m, \quad (13)$$

где m — угол отклонения от угла радиус-вектора точки перехода.

$$m = 2 \cdot p \cdot u, \quad (14)$$

где u — часть углового сектора профиля статора для изучения гладкости в окрестности точки перехода. Величину u (для $z_2 = 2..12$) определяем по эмпирической формуле:

$$u = 0{,}12 - 0{,}01 \cdot (z_2 - 1). \quad (15)$$

На рис. 2 можно заметить, что с увеличением радиуса ролика в окрестности точки перехода эквидистантных линий профиль статора из гладкого превращается в самопересекающийся. Поведение функции F_s также изменяется, и при появлении эффекта самопересечения профиля возникает петля (рис. 2 *в*).

Этот эффект положен в основу предлагаемого авторами статьи алгоритма контроля гладкости профиля статора, приведенного на рис. 3. Следует отметить, что, судя по многочисленным замерам, если критерий гладкости статора выполняется, то гладкость профиля ротора проверять не требуется, так как он построен на гипоциклоиде с меньшим значением радиуса основной окружности.

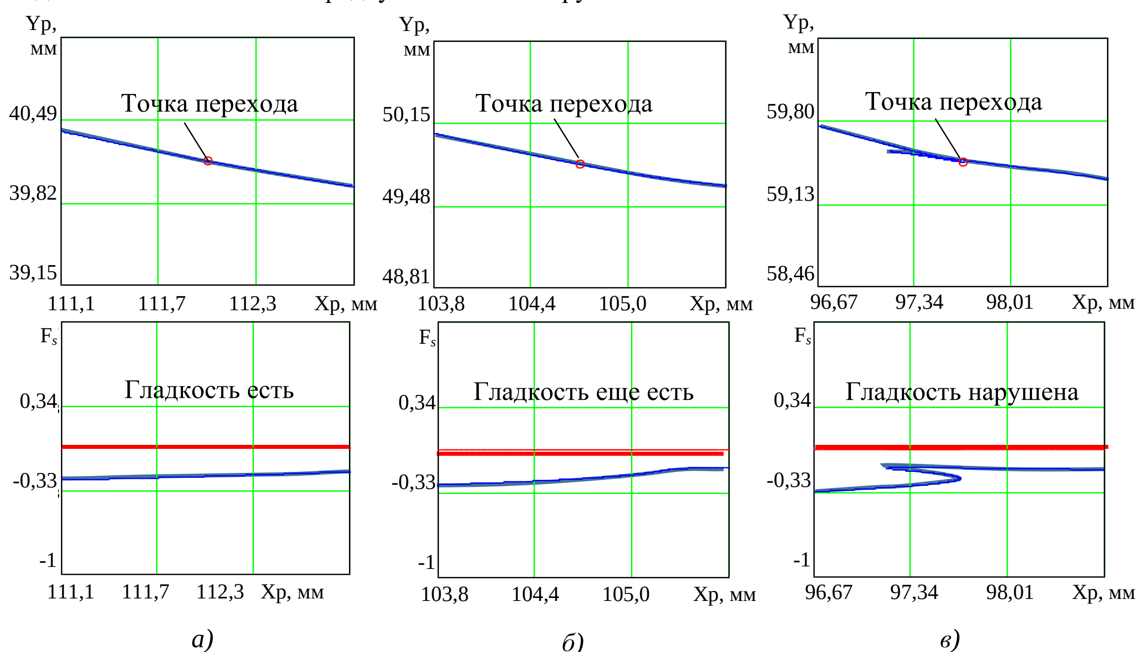


Рис. 2. Профиль статора в окрестности ±1 мм от точки перехода эквидистантных линий (верхний график) и значения функции F_s (нижний график) при $z_1 = 3$ и $R_k = 150$ мм, для R_r: *а* — 40 мм; *б* — 50 мм; *в* — 60 мм

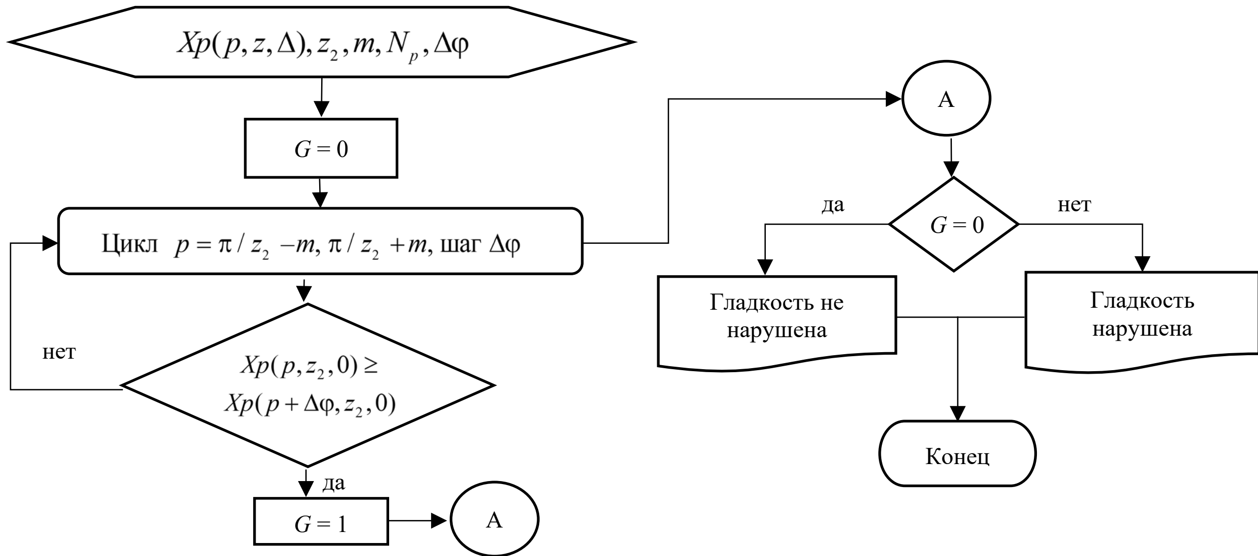


Рис. 3. Схема алгоритма контроля гладкости профиля статора

Контроль гладкости профиля статора должен проводиться всегда при проектировании геометрии торцевого сечения героторной машины. С целью изучения параметра максимального радиуса ролика $R_{r\,max}$, ниже которого гладкость кривой не нарушается, авторы провели серию численных экспериментов, в которых задавались различными значениями контурного радиуса R_k и числами зубьев ротора z_1.

Первым целевым параметром данного исследования является площадь живого сечения рабочего органа S. Этот параметр входит в формулу подачи героторной машины и определяет ее производительность. С имеющимися параметрическими функциями, описывающими профили ротора и статора, задача по определению S сводится к вычислению разности площадей параметрических кривых статора S_s и ротора S_r (9). Формула площади параметрической кривой известна из математики, и поэтому в методике авторов она выглядит так:

$$S = S_s - S_r = \int_0^{z_2\cdot 2\pi}\left(X_p(p,z_2,0)\cdot\frac{\partial Y_p(p,z_2,0)}{\partial p}\right)dp - \int_0^{z_1\cdot 2\pi}\left(X_p(p,z_1,\Delta)\cdot\frac{\partial Y_p(p,z_1,\Delta)}{\partial p}\right)dp \tag{16}$$

Вторым целевым параметром исследования является приведенный радиус $\rho_{пр}$ кривизны при контактном взаимодействии ротора и статора. Напомним, что согласно теории Герца, при контакте двух цилиндрических поверхностей рассчитывается приведенный радиус, который в формуле контактных напряжений находится в знаменателе. Следовательно, величина контактных напряжений наряду с физико-механическими параметрами материалов контактируемых поверхностей будет иметь наибольшую величину при наименьшем значении приведенного радиуса $\rho_{пр}$, определяемого по формуле:

$$\rho_{пр} = (\rho_r\cdot\rho_s)/(\rho_r+\rho_s), \tag{17}$$

где ρ_r — радиус эквидистантной окружности ротора, равный параметру R_r; ρ_s — радиус кривой профиля статора.

Заметим, если $\rho_s > 1$, то числитель в формуле (17) всегда растет быстрее, чем знаменатель, следовательно, наименьшее значение $\rho_{пр\,min}$ полностью определяется параметром наименьшего радиуса статора $\rho_{ст\,min}$.

В торцевом сечении рабочего органа героторной машины при любом угле поворота ротора осуществляется непрерывный контакт его эквидистантной окружности со сложной кривой профиля статора. По результатам наблюдений за динамикой контактных взаимодействий можно сделать вывод, что наибольшие напряжения возникают в точках перехода эквидистанты гипоциклоиды в эквидистанту окружности профиля статора. Следовательно, наименьший радиус линии профиля статора $\rho_{ст\,min}$ также будет находиться в зоне перехода эквидистантных линий и определится по известной из математики формуле:

$$\rho_{ст\min}(p) = \frac{\left[\left(\frac{\partial X_p(p,z_2,0)}{\partial p}\right)^2+\left(\frac{\partial Y_p(p,z_2,0)}{\partial p}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{-\left(\frac{\partial X_p(p,z_2,0)}{\partial p}\right)\cdot\left(\frac{\partial^2 Y_p(p,z_2,0)}{\partial p^2}\right)+\left(\frac{\partial^2 X_p(p,z_2,0)}{\partial p^2}\right)\cdot\left(\frac{\partial Y_p(p,z_2,0)}{\partial p}\right)}, \tag{18}$$

где $\rho = \pi / z_2$ угловой параметр точки профиля статора в месте перехода эквидистантных линий. В случае потери гладкости линии статора параметр $\rho_{\text{ст min}}$ стремится к нулю.

Описанная выше методика реализована в системе математических расчетов Mathcad. При выполнении расчетов коэффициент укорочения гипоциклоиды a=0,99, N_p = 40 000.

На первом этапе исследований планируется изучение максимального радиуса ролика $R_{r\max}$, при котором критерий G гладкости линии профиля статора равен нулю. Изменяемые параметры — контурный радиус R_k (100, 150, 200 мм) и число зубьев ротора z_1 от 1 до 7). Расчеты проводятся при последовательном увеличении параметра R_r от 5 мм до срабатывания критерия гладкости G. Исследуемый параметр $R_{r\,max}$ фиксируем с точностью до 1 мм.

На втором этапе проводятся серии расчетов для изучения влияния радиуса ролика R_r (от 5 мм до $R_{r\max}$, числа зубьев ротора z_1 (от 2 до 7) и контурного радиуса R_k (100, 150, 200 мм) на площадь живого сечения S и минимальный приведенный радиус контакта $\rho_{\text{пр min}}$.

Описанная методика расчета геометрических параметров профиля торцевого сечения рабочего органа геротопной машины может быть реализована в любой другой системе программирования или в системе компьютерной математики.

Результаты исследования. Данные численных опытов по определению параметра максимального радиуса ролика $R_{r\max}$, при котором гладкость линии профиля статора сохраняется, приведены в таблице 1.

Таблица 1

Максимальный радиус ролика $R_{r\max}$ (мм) при различных контурных радиусах R_k (мм)

z_1	$R_k = 100$	$R_k = 150$	$R_k = 200$
1	66,6	100	133
2	45	68	91
3	27	41	55
4	20	31	40
5	15	23	31
6	12	19	25
7	10	16	21

На основании данных таблицы 1 построены графики (рис. 4 *а*). Видно, что оцениваемый параметр $R_{r\max}$ при увеличении контурного радиуса R_k растет пропорционально. Введем в рассмотрение относительный параметр $R_o = R_{r\max} / R_k$, график которого представлен на рис. 4 *б*.

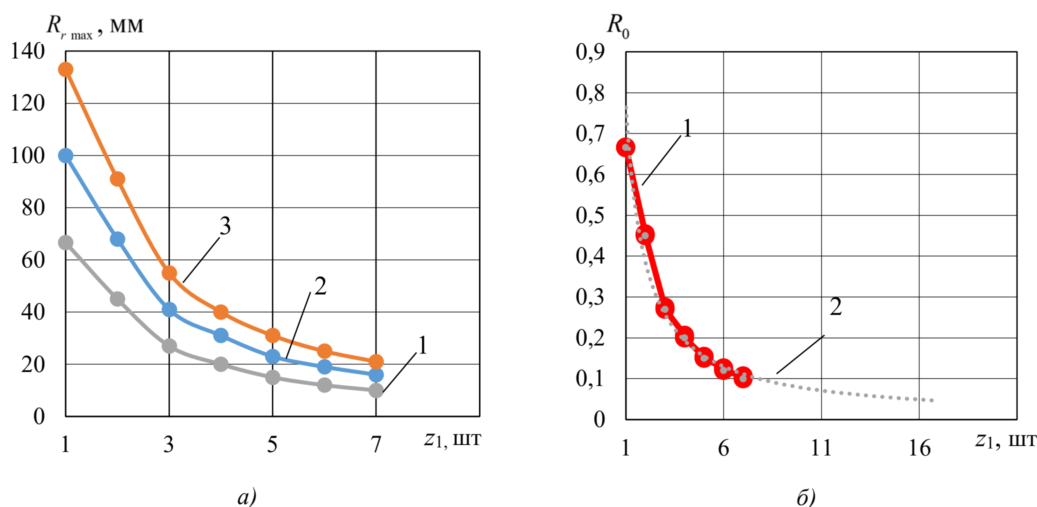


Рис. 4. Зависимость максимального радиуса ролика от числа зубьев ротора:
а — $R_{r\max}$ при R_k: 1 — 100 мм; 2 — 150 мм; 3 — 200 мм; *б* — R_o (1) и линия тренда (2) с экстраполяцией до z_1=16

Эмпирическая формула, с помощью которой можно определить максимально допустимый радиус ролика $R_{r\,\max}$, имеет вид:

$$R_o = 0{,}768 z_1^{-0.996} \tag{19}$$

При $z_1 = 15$, $R_k = 150$ мм, $R_o = 0{,}0517$ мм, $R_{r\,\max} = 7{,}76$ мм гладкость профиля достигается при $R_r = 7{,}5$ мм. При $z_1 = 10$, $R_k = 200$ мм, $R_o = 0{,}0775$ мм, $R_{r\,\max} = 15{,}5$ мм гладкость профиля достигается при $R_r = 15{,}5$ мм. Таким образом, можно сделать вывод об удовлетворительной точности эмпирической формулы (19) для предсказания максимально допустимого параметра $R_{r\,\max}$.

Следует отметить, что формула (19) получена при значениях коэффициента укорочения $a = 0{,}99$. Уменьшение a приводит к достижению гладкости профиля и при более значительном увеличении параметра R_r. Однако при этом изменяется форма зуба циклоидального зацепления и нарушаются условия контактного взаимодействия ротора и статора, особенно в тех местах, где ротор должен касаться статора боковыми сторонами зубьев. Расчеты показывают, что при $a = 0{,}99$ и $R_r = 38$ мм критерий гладкости находится на пределе выполнимости. Однако при $a = 0{,}99$ и $R_r = 38$ мм достигается хорошая гладкость профиля статора, но нарушается кинематический контакт деталей рабочего органа машины, восстановить который удается лишь специальным подбором значений параметров гипоциклоид ротора и статора. Поэтому исследование влияния коэффициента укорочения на параметр $R_{r\,\max}$ выведены за рамки данного исследования.

В таблице 2 представлены данные расчетов целевых параметров исследований для числа зубьев ротора $z_1 = 3$ при различных значениях контурных радиусов. Полученные значения площади живого сечения S и минимального приведенного радиуса контакта $\rho_{пр\,\min}$ в последних двух колонках таблицы 2 приведены к безразмерному виду для удобства анализа.

Таблица 2

Данные расчетов целевых параметров при z_1=3

R_r, мм	$\rho_{пр\,\min}$, мм	S, мм^2	S/max (S)	$\rho_{пр\,\min}$/max ($\rho_{пр\,\min}$)
R_k = 150 мм				
5	4,72	18038	0,9712	0,2656
10	8,83	18256	0,983	0,4969
15	12,28	18415	0,9915	0,6911
20	14,98	18513	0,9968	0,843
25	16,85	18572	1	0,9482
30	17,77	18530	0,9977	1
35	17,63	18450	0,9934	0,9921
40	16,28	18307	0,9857	0,9162
R_k = 200 мм				
10	9,14	32275	0,9786	0,3857
20	16,37	32738	0,9926	0,6909
30	21,36	32982	1	0,9015
35	22,9	32980	0,9999	0,9664
40	23,69	32943	0,9988	0,9998
45	23,695	32844	0,9958	1
50	22,82	32685	0,991	0,9631
55	20,98	32466	0,9844	0,8854
R_k = 100 мм				
5	4,57	8068	0,9773	0,3857
10	8,18	8184	0,9914	0,6903

R_r, мм	$\rho_{пр\ min}$, мм	S, мм^2	S/max (S)	$\rho_{пр\ min}$, /max ($\rho_{пр\ min}$)
R_k = 150 мм				
13	9,83	8225	0,9964	0,8295
15	10,68	8245	0,9988	0,9013
17	11,32	8255	1	0,9553
20	11,85	8235	0,9976	1
24	11,64	8189	0,992	0,9823

На рис. 5 представлены графики изменения целевых параметров исследований при z_1=3. На них нетрудно заметить, что при увеличении радиуса ролика R_r происходит незначительное изменение площади живого сечения S и достаточно сильное изменение приведенного радиуса контакта, максимальное значение которого приходится на достаточно узкий диапазон R_r, что представляет для проектировщика наибольший интерес, так как при этом контактные напряжения будут минимальны. Расчеты для других значений z_1 (от 2 до 7) показали примерно такую же качественную картину, как и на рис. 5.

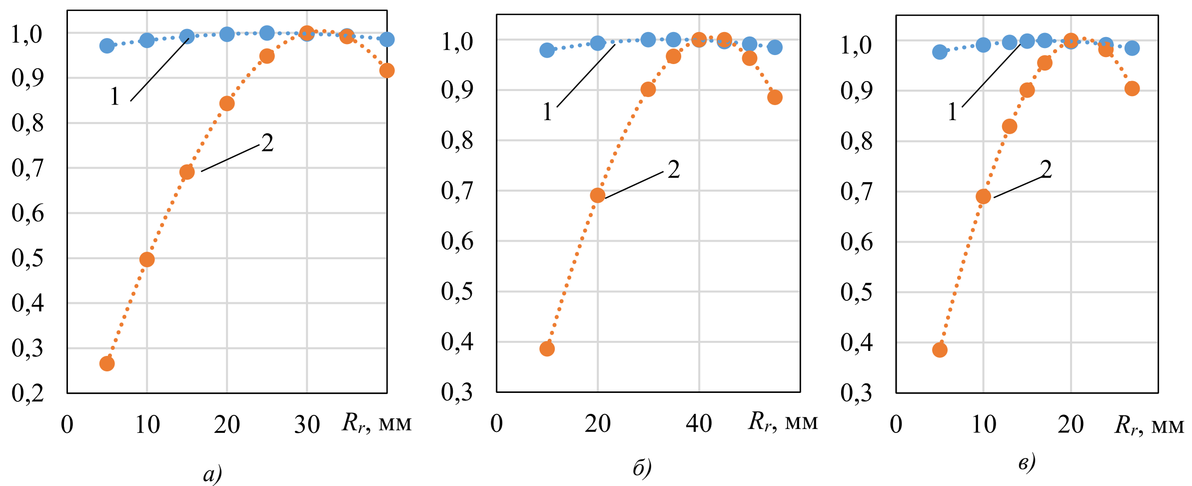


Рис. 5. Зависимости целевых параметров исследований от радиуса ролика R_r при z_1 = 3, a = 0,99, Δ = 0:
1 — S/max(S); 2 — $\rho_{пр\ min}$ /max($\rho_{пр\ min}$) (таблица 2); R_k, мм: *а* — 150; *б* — 200; *в* — 100 мм

В таблице 3 представлены данные расчетов оптимальных радиусов роликов $R_{r\ opt}$ для различных параметров z_1 и R_k. В результате анализа выяснилось, что параметры $R_{r\ opt}$ и R_k для одного z_1 изменяются практически одинаково. Поэтому, если ввести параметр относительного оптимального радиуса ролика

$$R_{ro} = R_{r\ opt} / R_k, \tag{20}$$

то с помощью однофакторной зависимости вида $R_{ro} = f(z_1)$ можно на предварительном этапе проектирования рабочего органа героторной машины определять оптимальный радиус ролика R_r.

В результате аналогичных рассуждений для приведенных в таблице 3 параметров S и $\rho_{пр\ min}$ введены также безразмерные параметры относительного приведенного радиуса контакта $\rho_{пр\ o}$ и относительной площади живого сечения S_o:

$$S_o = S / R_k^2; \rho_{пр\ o} = r_{пр\ min} / R_k \tag{21}$$

Новые относительные величины также представлены в таблице 3.

Таблица 3

Оптимальные радиусы $R_{r\,opt}$ и относительные параметры зацепления

R_k, мм	z_1	$R_{r\,opt}$, мм	S, мм^2	$\rho_{\text{пр}\,\min}$, мм	R_{ro}	$\rho_{пр\,o}$	S_o
200	2	68	36103	43,2	0,340	0,216	0,903
150	2	51	20318	32,2	0,340	0,215	0,903
100	2	34	9015	21,65	0,340	0,217	0,902
100	3	21	8235	11,85	0,210	0,119	0,824
150	3	32	18530	17,8	0,213	0,119	0,824
200	3	42	32800	23,1	0,210	0,116	0,820
200	4	28	30015	15,32	0,140	0,077	0,750
150	4	21	16880	11,5	0,140	0,077	0,750
100	4	14	7495	7,63	0,140	0,076	0,750
100	5	10	6860	5,35	0,100	0,054	0,686
150	5	15	15441	8,1	0,100	0,054	0,686
200	5	20	27452	10,81	0,100	0,054	0,686
150	7	9	13050	4,7	0,060	0,031	0,580
200	7	12	22100	6,2	0,060	0,031	0,582
100	7	6	5780	3,2	0,060	0,032	0,578

Следует отметить, что все вновь введенные относительные величины с высокой степенью достоверности подчиняются аппроксимирующим формулам, включающим один фактор — число зубьев ротора z_1.

Формула относительного оптимального радиуса ролика R_{ro} имеет вид:

$$R_{ro} = 0{,}9331 \cdot z_1^{-1{,}392} \;\; (R^2 = 0{,}9965), \qquad (22)$$

где R^2 — величина достоверности аппроксимации.

Формула относительного приведенного радиуса контакта $\rho_{пр\,o}$ имеет вид:

$$\rho_{пр\,o} = 0{,}635 \cdot z_1^{-1{,}534} (R^2 = 0{,}9995). \qquad (23)$$

Формула относительной площади живого сечения S_o имеет вид:

$$S_o = 1{,}0175 - 0{,}0641 z_1 \;\; (R^2 = 0{,}9911). \qquad (24)$$

Рассмотрим пример применения полученных результатов при проектировании геометрии профиля торцевого сечения героторной машины. Зададимся следующим набором исходных данных: контурный радиус $R_k = 120$ мм, число зубьев ротора $z_1 = 4$, натяг в сопряжении Δ=0 мм (эмпирические формулы получены при нулевом натяге). Относительный оптимальный радиус ролика R_{ro} по формуле (22):

$$R_{ro} = 0{,}9331 \cdot 4^{-1{,}392} = 0{,}135.$$

Абсолютное значение радиуса ролика $R_r = R_{ro} \cdot R_k = 0{,}135 \cdot 120 = 16{,}2$ мм.

Относительный приведенный радиус контакта $\rho_{пр\,o}$ по формуле (23):

$$\rho_{пр\,o} = 0{,}635 \cdot 4^{-1{,}534} = 0{,}076.$$

Абсолютное значение минимального приведенного радиуса контакта:

$$\rho_{пр\,\min} = r_{пр\,o} R_k = 0{,}076 \cdot 120 = 9{,}12 \text{ мм}.$$

Относительная площадь живого сечения S_o по формуле (24):

$$S_o = 1{,}0175 - 0{,}0641 \cdot 4 = 0{,}761.$$

Абсолютное значение площади живого сечения:

$$S = S_o \cdot R_k^2 = 0,761 \cdot 120^2 = 10958\,\text{мм}^2.$$

Расчеты по программе Mathcad дают следующие величины: $S = 10820\,\text{мм}^2$, $\rho_{\text{пр}\min} = 9,167\,\text{мм}$. Как видно на этом примере, эмпирические формулы достаточно точно предсказывают основные параметры геометрии торцевого сечения героторной машины.

Обсуждение и заключение. Проведенное исследование направлено на решение задачи совершенствования рабочих органов героторных гидромашин и в достаточной степени соответствует работам отечественных и зарубежных авторов [10–15]. Основное отличие заключается в том, что при построении профилей ротора и статора использованы идеальные гипоциклоиды, обеспечивающие наибольшую кинематическую точность движения и контактного взаимодействия элементов зацепления. Известную проблему обеспечения натяга в сопряжении предлагается решить за счет разности параметров радиуса ролика, а для контроля гладкости профилей разработан специальный алгоритм [12]. Оптимальную геометрию профиля, как и в работе [10], предлагается определять на основе максимальной площади живого сечения рабочего органа героторной машины. Но при этом приведенный радиус контакта также должен иметь наибольшую величину, как залог наименьших контактных напряжений. В данном исследовании на основе большого числа расчетов по специально разработанной программе Mathcad в диапазоне чисел зубьев ротора z_1 от 2 до 7 и контурного диаметра R_k от 100 до 200 мм были определены оптимальные значения эквидистантного расстояния гипоциклоид, или радиусов роликов R_r, при которых достигается наилучшее сочетание приведенного радиуса контакта и площади живого сечения рабочего органа героторной машины. Выяснилось, что введение относительных величин радиуса ролика, площади живого сечения и приведенного радиуса контакта позволяет с помощью простых эмпирических зависимостей на раннем этапе проектирования получить абсолютные значения этих же величин для любого контурного радиуса в пределах установленных диапазонов.

Разработанная методика дает возможность на этапе проектирования профилей ротора и статора оценить производительность и работоспособность героторной машины. В перспективе подобные изыскания могут быть проведены для эпициклоидных и смешанных зацеплений в героторных гидромашинах.

Результаты исследований могут быть использованы в машиностроении при проектировании героторных гидравлических машин для улучшения их технико-эксплуатационных характеристик.

Список литературы

1. Baldenko D.F., Baldenko F.D. Single-Screw Hydraulic Machines in the Oil and Gas Industry: Fields of Application and Development Prospects. *Petroleum & Petrochemical Engineering Journal.* 2019;3(5):000207. https://doi.org/10.23880/ppej-16000207

2. Ramakrishnan Balaji Iyer, Jatti V.K., Yeshpal Yadav, Anurag Verma, Jaimin Desai, Dewan C.P. Design Optimization of CAD Model. *Materials Today: Proceedings*. 2017;4(8):7357–7364. https://doi.org/10.1016/j.matpr.2017.07.065

3. Hong-Seok Park, Xuan-Phuong Dang. Structural Optimization Based on CAD–CAE Integration and Metamodeling Techniques. *Computer-Aided Design*. 2010;42(10):889–902. https://doi.org/10.1016/j.cad.2010.06.003

4. Lebedev A., Kireev S., Korchagina M., Lubinec V. Improvement of Design of Device for Production of Cycloidal Pinion Gear. In book: M. Shamtsyan, M. Pasetti, A. Beskopylny (eds). *Robotics, Machinery and Engineering Technology for Precision Agriculture. Smart Innovation, Systems and Technologies*. Vol. 247. P. 223–236. Singapore: Springer; 2022. https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-981-16-3844-2_24

5. Korchagina M., Lebedev A., Kireev S., Vlaskin S. Model of Hole Mandrel Process in Tubular Workpieces. In book: A. Guda (ed) *Networked Control Systems for Connected and Automated Vehicles*. Vol. 509. P. 1541–1550. Cham: Springer; 2022. https://doi.org/10.1007/978-3-031-11058-0_156

6. Lebedev A., Kireev S., Korchagina M., Efimov A. Optimization of Structure Parameters of Semi-Trailer-Tank for Hydraulic Fracturing of Formation. In book: A. Guda (ed) *Networked Control Systems for Connected and Automated Vehicles*. Vol. 510. Cham: Springer; 2023. https://doi.org/10.1007/978-3-031-11051-1_178

7. Балденко Ф.Д., Яо Ян. Исследование площади камер рабочих органов одновинтовых гидравлических машин. *Бурение и нефть*. 2020;(6):24–29. https://burneft.ru/archive/issues/2020-06/24

8. Jie Chen, He Liu, Fengshan Wang, Guocheng Shi, Gang Cao, Hengan Wu. Numerical Prediction on Volumetric Efficiency of Progressive Cavity Pump with Fluid-Solid Interaction Model. *Journal of Petroleum Science and Engineering.* 2013;109:12–17. https://doi.org/10.1016/j.petrol.2013.08.019

9. Gamboa J., Olivet A., Espin S. New Approach for Modeling Progressive Cavity Pumps Performance. *Journal of Petroleum Technology*. 2003;56(5):51–53. https://doi.org/10.2118/84137-MS

10. Yang Yao, Baldenko F. Optimization of Cycloidal Gearing Geometric Parameters of Positive Displacement Motors. *Equipment and Technologies for Oil and Gas Complex*. 2021;(6):22–26. https://doi.org/10.33285/1999-6934-2021-6(126)-22-26

11. Lyagov I., Baldenko F., Lyagov A., Yamaliev V., Lyagova A. Methodology for Calculating Technical Efficiency of Power Sections in Small-Sized Screw Downhole Motors for the "Perfobur" System. *Journal of Mining Institute*. 2019;240:694–700. https://doi.org/10.31897/pmi.2019.6.694

12. Коротаев Ю.А., Алпатов А.Н., Соболев А.В., Мялицин Н.Ю. Исследование систематических погрешностей зацепления героторного механизма, спрофилированного от исходного контура рейки. *Известия Тульского государственного университета. Технические науки*. 2017;8(1):112–120.

13. Коротаев Ю.А., Голдобин Д.А. Особенности проектирования и расчета многозаходных винтовых героторных механизмов мультифазных насосов. *Известия Тульского государственного университета. Технические науки.* 2016;8(2):175–182.

14. Minikaev A.F., Pronin V.A., Zhignovskaya D.V., Kuznetsov Yu.L. The Use of Computer Modelling for the Development of the Working Bodies' Profiles for Screw Single-Rotor Compressor. *Journal of International Academy of Refrigeration*. 2018;(1):61–66. https://doi.org/10.17586/1606-4313-2018-17-1-61-66

15. Балденко Ф.Д., Ковалёнок А.Е. Компьютерное моделирование контактного взаимодействия рабочих органов одновинтовых гидравлических машин. *Территория Нефтегаз.* 2014;10:18–27.

References

1. Baldenko DF, Baldenko FD. Single-Screw Hydraulic Machines in the Oil and Gas Industry: Fields of Application and Development Prospects. *Petroleum & Petrochemical Engineering Journal.* 2019;3(5):000207. https://doi.org/10.23880/ppej-16000207

2. Ramakrishnan Balaji Iyer, Jatti VK, Yeshpal Yadav, Anurag Verma, Jaimin Desai, Dewan CP. Design Optimization of CAD Model. *Materials Today: Proceedings*. 2017;4(8):7357–7364. https://doi.org/10.1016/j.matpr.2017.07.065

3. Hong-Seok Park, Xuan-Phuong Dang. Structural Optimization Based on CAD–CAE Integration and Metamodeling Techniques. *Computer-Aided Design*. 2010;42(10):889–902. https://doi.org/10.1016/j.cad.2010.06.003

4. Lebedev A, Kireev S, Korchagina M, Lubinec V. Improvement of Design of Device for Production of Cycloidal Pinion Gear. In: M Shamtsyan, M Pasetti, A Beskopylny (eds). *Robotics, Machinery and Engineering Technology for Precision Agriculture. Smart Innovation, Systems and Technologies*. Vol. 247. P. 223–236. Singapore: Springer; 2022. https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-981-16-3844-2_24

5.Korchagina M, Lebedev A, Kireev S, Vlaskin S. Model of Hole Mandrel Process in Tubular Workpieces. In book: A. Guda (ed) *Networked Control Systems for Connected and Automated Vehicles*. Vol. 509. P. 1541–1550. Cham: Springer; 2022. https://doi.org/10.1007/978-3-031-11058-0_156

6.Lebedev A, Kireev S, Korchagina M, Efimov A. Optimization of Structure Parameters of Semi-Trailer-Tank for Hydraulic Fracturing of Formation. In book: A. Guda (ed) *Networked Control Systems for Connected and Automated Vehicles*. Vol. 510. Cham: Springer; 2023. https://doi.org/10.1007/978-3-031-11051-1_178

7. Baldenko FD, Yang Yao. The Study of the Chambers Area of the Working Bodies of Single-Screw Hydraulic Machines. *Drilling and Oil Magazine*. 2020;(6):24–29. https://burneft.ru/archive/issues/2020-06/24

8. Jie Chen, He Liu, Fengshan Wang, Guocheng Shi, Gang Cao, Hengan Wu. Numerical Prediction on Volumetric Efficiency of Progressive Cavity Pump with Fluid-Solid Interaction Model. *Journal of Petroleum Science and Engineering.* 2013;109:12–17. https://doi.org/10.1016/j.petrol.2013.08.019

9. Gamboa J, Olivet A, Espin S. New Approach for Modeling Progressive Cavity Pumps Performance. *Journal of Petroleum Technology*. 2003;56(5):51–53. https://doi.org/10.2118/84137-MS

10. Yang Yao, Baldenko F. Optimization of Cycloidal Gearing Geometric Parameters of Positive Displacement Motors. *Equipment and Technologies for Oil and Gas Complex*. 2021;(6):22–26. https://doi.org/10.33285/1999-6934-2021-6(126)-22-26

11. Lyagov I, Baldenko F, Lyagov A, Yamaliev V, Lyagova A. Methodology for Calculating Technical Efficiency of Power Sections in Small-Sized Screw Downhole Motors for the "Perfobur" System. *Journal of Mining Institute*. 2019;240:694–700. https://doi.org/10.31897/pmi.2019.6.694

12. Korotaev YuA, Alpatov AN, Sobolev AV, Myalitsin NYu. Investigation of the Systematic Error of Gerotor Mechanism Action Profiled from the Initial Rack Contour. *Izvestiya Tula State University*. 2017;8(1):112–120.

13. Korotaev YuA, Goldobin DA. Designing and Calculation Peculiarities of the Multiple-Thread Screw-Type Gerotor Machines of the Multiphase Pumps. *Izvestiya Tula State University.* 2016;8(2):175–182.

14. Minikaev AF, Pronin VA, Zhignovskaya DV, Kuznetsov YuL. The Use of Computer Modelling for the Development of the Working Bodies' Profiles for Screw Single-Rotor Compressor. *Journal of International Academy of Refrigeration*. 2018;(1):61–66. https://doi.org/10.17586/1606-4313-2018-17-1-61-66

15. Baldenko FD, Kovalenok AE. Komp'yuternoe modelirovanie kontaktnogo vzaimodeistviya rabochikh organov odnovintovykh gidravlicheskikh mashin. *Neftegaz Territory.* 2014;10:18–27. (In Russ.)

Поступила в редакцию 29.05.2023
Поступила после рецензирования 21.06.2023
Принята к публикации 26.06.2023

Об авторах:

Сергей Олегович Киреев, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой машин и оборудования нефтегазового комплекса Донского государственного технического университета, (344003, РФ, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1), ResearcherID, ScopusID, ORCID, AuthorID, kireevso@yandex.ru

Алексей Романович Лебедев, кандидат технических наук, доцент, кафедры машин и оборудования нефтегазового комплекса» Донского государственного технического университета, (344003, РФ, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1), ResearcherID, ScopusID, ORCID, AuthorID, alex-diplom@mail.ru

Марина Валерьевна Корчагина, кандидат технических наук, доцент, кафедры машин и оборудования нефтегазового комплекса» Донского государственного технического университета, (344003, РФ, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1), ResearcherID, ScopusID, ORCID, AuthorID, ms.korchaginamv@mail.ru

Заявленный вклад соавторов:

С.О. Киреев — формирование основной концепции, цели и задачи исследования, научное руководство.

А.Р. Лебедев — проведение расчетов, подготовка текста, анализ результатов исследований, формирование выводов.

М.В. Корчагина — доработка рисунков и текста, корректировка выводов.

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

Received 29.05.2023
Revised 21.06.2023
Accepted 26.06.2023

About the Authors:

Sergey O. Kireev, Dr.Sci. (Eng.), Professor, Head of the Oil and Gas Complex Machinery and Equipment Department, Don State Technical University (1, Gagarin sq., Rostov-on-Don, 344003, RF), ResearcherID, ScopusID, ORCID, AuthorID, kireevso@yandex.ru

Alexey R. Lebedev, Cand.Sci. (Eng.), Associate Professor of the Oil and Gas Complex Machinery and Equipment Department, Don State Technical University (1, Gagarin sq., Rostov-on-Don, 344003, RF), ResearcherID, ScopusID, ORCID, AuthorID, alex-diplom@mail.ru

Marina V. Korchagina, Cand.Sci. (Eng.), Associate Professor of the Oil and Gas Complex Machinery and Equipment Department, Don State Technical University (1, Gagarin sq., Rostov-on-Don, 344003, RF), ResearcherID, ScopusID, ORCID, AuthorID, ms.korchaginamv@mail.ru

Claimed contributorship:

SO Kireev: basic concept formulation, research objectives and tasks, academic advising.

AR Lebedev: computational analysis, text preparation, analysis of the research results, formulation of conclusions.

MV Korchagina: revision of drawings and text, correction of conclusions.

Conflict of interest statement: the authors do not have any conflict of interest.

All authors have read and approved the final manuscript.